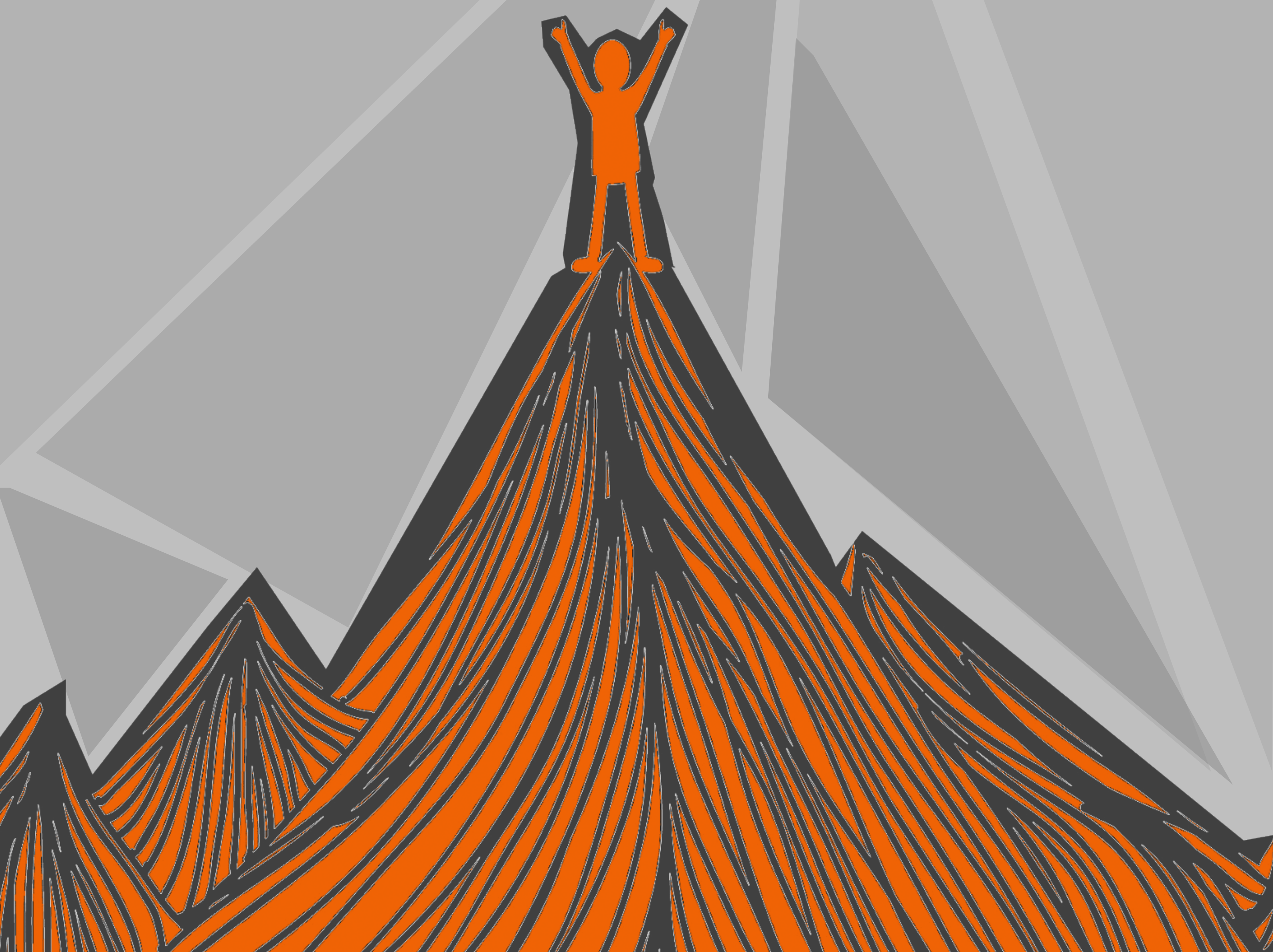
MAXIMUM
ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНАМ

Математика ЕГЭ-2019

Разбор демоверсии экзамена от экспертов



Разбор демоверсии ЕГЭ по профильной математике - 2019

Часть 1

Задание №1

Поезд отправился из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут (время московское) и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?

Описание задания: *текстовая задача, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умение использовать приобретенные знания в повседневной жизни.*

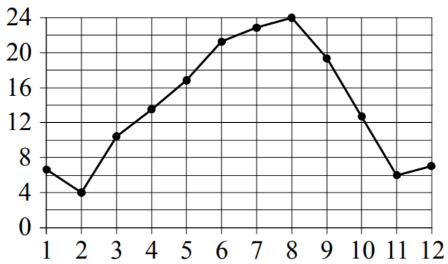
Решение: Поезд находился в пути 10 минут до полуночи и еще 7 часов 50 минут после полуночи. Всего 8 часов.

Ответ: 8

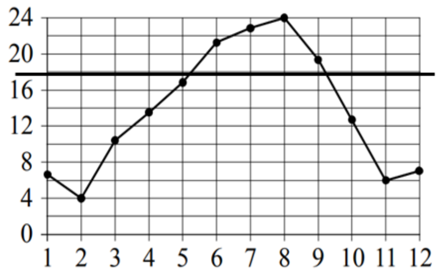
Совет от эксперта: *Чтобы справиться с таким заданием на экзамене, нужно внимательно читать условие и проверять полученный ответ. Ответ должен: быть целым числом или десятичной дробью; отвечать на поставленный вопрос; соответствовать реальности.*

Задание №2

На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 г. По горизонтали указаны номера месяцев; по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией. Сколько месяцев средняя температура была больше 18 градусов Цельсия?



Описание задания: *текстовая задача по анализу графиков и диаграмм, базовый уровень*



сложности, 1 первичный балл.

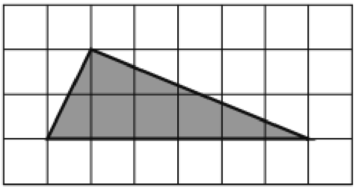
Решение: Проведем линию, которая обозначает температуру 18°. Посчитаем количество точек выше этой линии. Всего 4 точки. Это и будет количество месяцев, где температура больше 18°

Ответ: 4

Совет от эксперта: *в большинстве случаев ученики допускают в этом задании ошибки по невнимательности. Чтобы не допустить такие обидные ошибки нужно: определить тип графика, понять ситуацию, которую описывает график, определить, что обозначают оси. Только после того, как вы убедились, что можете «читать» график, стоит переходить к ответу на вопрос задачи.*

Задание №3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Описание задания: *планиметрическая задача, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять действия с геометрическими фигурами на клетчатой поверхности, координатами и векторами.*

Решение:

Вспомним формулу площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$. Осталось по клеточкам посчитать длину высоты и основания треугольника. Высота равна 2 клетки, а основание – 6 клеток. Подставим значения в формулу: $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \bullet 2 \bullet 6 = 6$

Ответ: 6

Совет от эксперта: *Наиболее часто встречаются задания на нахождение площади фигуры по клеткам, однако возможны и другие формулировки. Работа может быть с известной фигурой или произвольной. Также встречаются задания в координатной плоскости (в них обычно просят найти координаты точки или длину отрезка), также не забудьте повторить работу с векторами.*

Задание №4

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Описание задания: *текстовая задача по элементам комбинаторики, статистики и теории вероятностей, базовый уровень сложности, 1 первичный балл.*

Решение: Необходимо найти отношение числа билетов, где встречается вопрос о грибах к общему количеству билетов. То есть надо знать определение вероятности. Сколько билетов всего? 25. В скольких билетах нет вопроса о грибах? В двух. Поэтому искомая вероятность равна:

$$\frac{2}{25}=0,08$$

Ответ: 0,08

Совет от эксперта: *в большинстве случаев достаточно знать только основное определение вероятности и уметь применять его для конкретных ситуаций. Иногда также встречаются задания, где от вас потребуется знание правил сложения и умножения вероятностей событий.*

Задание №5

Найдите корень уравнения $3^{x-5}=81$.

Описание задания: *алгебраическое уравнение, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения решать уравнения.*

Решение: Приведем обе части уравнения к одному основанию. 81=3^4, тогда:

$3^{x-5}=3^4$.

Чтобы равенство выполнялось, нужно приравнять степени: $x-5=4$.

Решаем линейное уравнение и получаем ответ: $x=9$

Ответ: 9

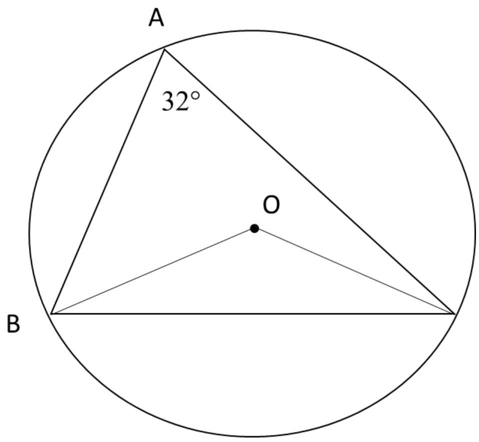
Совет от эксперта: *нужно уметь решать различные уравнения: тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные, рациональные. Здесь вам понадобится знание основных свойств различных функций и алгоритмы решения.*

Задание №6

Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен 32°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Описание задания: *планиметрическая задача, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять действия с геометрическими фигурами.*

Решение:



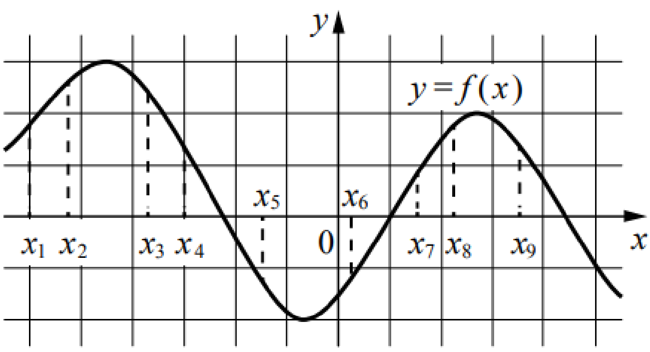
Угол BAC является вписанным и опирается на меньшую дугу BC. Угол BOC является центральным и опирается на эту же самую дугу. Если центральный и вписанный углы опираются на одну и ту же дугу, то центральный угол в 2 раза больше вписанного. Отсюда получаем: ∠BOC=2∠BAC=2·32°=64°.

Ответ: 64

Совет от эксперта: *Это задание требует умения работать с различными геометрическими фигурами, в том числе с окружностями. Необходимо знать теорему Пифагора, свойства фигур и различных элементов, определение тригонометрических функций через прямоугольный треугольник, теоремы, касающиеся медиан, высот, биссектрис треугольника, теоремы об описанных и вписанных окружностях, формулы площадей.*

Задание №7

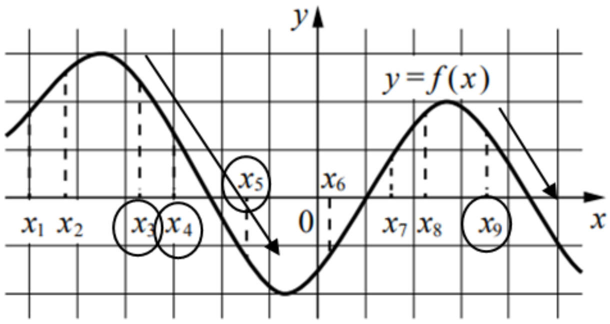
На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, \dots x_9$.



Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции *f (x)* отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Описание задания: *анализ функций, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять действия с функциями*

Решение: Если производная функции отрицательна - функция убывает, если положительна - возрастает. В вопросе нас просят найти, где производная отрицательна, значит, нам необходимо найти те из отмеченных точек, в которых данная функция убывает.



Определить эти промежутки можно по графику: там, где функция убывает, линия "спускается с горы" (стрелки на графике). Тогда нам нужны только точки x_3, x_4, x_5 и x_9. Обратите внимание! В вопросе спрашивается количество точек, значит, выпишем 4.

Ответ: 4

Совет от эксперта: *65% вопросов №7 в банке ФИПИ посвящены визуальной связи графика функции и графика производной; 15% — задания на физический смысл производной, 15% — задания на работу с касательной и 5% — задания на работу с первообразной.*

Задание №8

В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ выразите в см.

Описание задания: *задача по стереометрии, базовый уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять действия с геометрическими фигурами.*

Решение:

Посчитаем объём жидкости в первом сосуде: $V=16\pi r^2$.

Посчитаем объём во втором сосуде, предположив, что там вода поднялась на h: $V=\pi(2r)^2h=4\pi r^2h$

Так как переливали один и тот же объём воды, объёмы в сосудах, равны.

$$16\pi r^2=4\pi r^2h$$

Сократим обе части на πr^2 и выразим высоту:

$$16=4h$$

$$h=4$$

Высота воды во втором сосуде равна 4 см.

Ответ: 4

Совет от эксперта: *В ЕГЭ задания из этого блока представлены ограниченным количеством конфигураций, и для решения большинства заданий 8 достаточно одной формулы: объёма или* *площади поверхности фигуры. Несмотря на это, лишь половина всех школьников получает балл за это задание.*

Часть 2

Задание №9

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Описание задания: преобразование выражений, повышенный уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять вычисления и преобразования

Решение:

Вспомним формулу синуса двойного угла и подставим известное в формулу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\bullet 0,6\bullet\sin\alpha = 1,2\sin\alpha\ .$$

Нужно найти $\sin\alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\sin^2\alpha + (0,6)^2 = 1$$

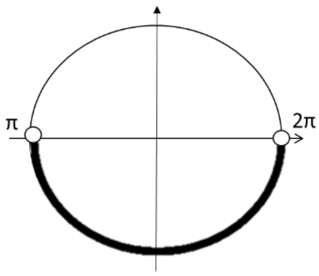
$$\sin^2\alpha + (\frac{3}{5})^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha < 2\pi$, так как это нижняя часть тригонометрического круга, где синус принимает отрицательное значение.



Тогда $\sin\alpha = -\frac{4}{5} = -0,8$

$1,2\sin\alpha = 1,2\bullet(-0,8) = -0,96$

Ответ: -0,96

Совет от эксперта: *Задание требует навыков работы со всеми типами выражений: показательными, логарифмическими, иррациональными, рациональными и тригонометрическими. Задание 9 представлено 4 типами. Это работа с:*

- *выражениями, в которых фигурируют только числа;*
- *выражениями с переменными, значение которых определено;*
- *выражениями с переменными, значение которых не определено;*
- *выражениями с функциями.*

Задание №10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приемник регистрирует частоту сигнала, отраженного от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \bullet \frac{f - f_0}{f + f_0}$$

где c=1500 м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц), f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала в (МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Описание задания: *прикладная задача, повышенный уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения использовать приобретенные знания в практической деятельности и повседневной жизни.*

Решение:

Подставим в формулу то, что нам известно: $2 = 1500 \bullet \frac{f - 749}{f + 749}$.

Преобразуем это выражение. Сначала домножим на знаменатель (он не может равняться нулю, так как частота всегда положительна).

$$2(f + 749) = 1500 \bullet (f - 749)$$

$$2f + 2 \bullet 749 = 1500 \bullet f - 1500 \bullet 749$$

$$1500 \bullet 749 + 2 \bullet 749 = 1500 \bullet f - 2f$$

$$(1500 + 2) \bullet 749 = f(1500 - 2)$$

$$1502 \bullet 749 = 1498f$$

Поделим обе части на 749:

$$1502 = 2f$$

$$f = 751$$

Ответ: 751

Совет от эксперта: *Это задание всегда представляет собой некоторую техническую задачу со сложными формулировками. Задача сдающего ЕГЭ — вычленить самое главное из текста, а именно что дано и что спрашивается. И в итоге решить уравнение или неравенство.*

Задание № 11

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Описание задания: *текстовая задача, повышенный уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения строить и исследовать простейшие математические модели.*

Решение:

Обозначим скорость течения весной за *x*. Введем также скорость катера y. Тогда скорость движения по течению весной будет y + x, против течения y – x. По условию, скорость течения реки летом замедляется на 1, тогда скорость движения по течению летом будет y + (x – 1), против течения y – (x – 1). Это можно структурировать в таблицу:

	По течению	Против течения
Весна	y+x	y-x
Лето	y + (x – 1)	y - (x – 1),

Если весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению, то первое уравнение выглядит так: $\frac{y+x}{y-x}=1\frac{2}{3}$. Если летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению, то: $\frac{y+x-1}{y-(x-1)}=1\frac{1}{2}$.

Решим систему: $\begin{cases}\frac{y+x}{y-x}=1\frac{2}{3}\\ \frac{y+x-1}{y-(x-1)}=1\frac{1}{2}\end{cases}$.

$$\begin{cases}\frac{y+x}{y-x}=\frac{5}{3}\\ \frac{y+x-1}{y-x+1}=\frac{3}{2}\end{cases};\ \begin{cases}3y+3x=5y-5x\\ 2(y+x-1)=3(y-x+1)\end{cases};\ \begin{cases}4x=y\\ 2(4x+x-1)=3(4x-x+1)\end{cases};\ \begin{cases}4x=y\\ 10x-2=9x+3\end{cases};\ x=5$$

Можно найти только x, так как именно x показывает скорость течения весной. Итого, скорость течения - 5 км/ч.

Ответ: 5

Совет от эксперта: *Все типы задания 11 можно разделить на 3 группы: задания на проценты, на производительность и на скорость. Для решения задачи необходимо уметь строить математические модели для различных ситуаций, которые не всегда поддаются шаблонному решению.*

Задание № 12

Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+4)^2+2x+7$

Описание задания: *анализ функций, повышенный уровень сложности, 1 первичный балл, проверяет умения выполнять действия с функциями.*

Решение:

Найдем производную функции:

$$y'=\frac{2(x+4)}{(x+4)^2}+2$$

При взятии производной помни таблицу производных и формулы, сейчас нам понадобилось, что

$$(\ln t)'=\frac{1}{t},\ (t^n)'=n\bullet t^{n-1}.$$

Приравняем производную нулю и решим уравнение:

$$\frac{2(x+4)}{(x+4)^2}+2=0$$

$$\frac{2}{x+4}+2=0$$

$$\frac{2+2(x+4)}{x+4}=0$$

$$\frac{2+2x+8}{x+4}=0$$

$$\frac{2x+10}{x+4}=0$$

$$2x+10=0$$

$$x=-5$$

Если получается одно решение, то это и есть точка экстремума, в данном случае точка максимума.

Ответ: -5

Совет от эксперта: *В задании 12 вам может встретиться всего два типа заданий: задание на нахождение точки максимума/минимума и задания на нахождение максимального или минимального значения функции.*

Задание № 13

а) Решите уравнение $2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}]$.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, повышенный уровень сложности, 2 первичных балла, проверяет умения решать уравнения и отбирать корни.*

Решение:

а) $2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$

Применим формулу синуса суммы и косинуса двойного угла:

$$2(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3})+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$$

$$2(\sin x\bullet\frac{1}{2}+\cos x\bullet\frac{\sqrt{3}}{2})+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$$

Раскроем скобки:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$$

Приведем подобные и представим 1 по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x$$

Приведем подобные:

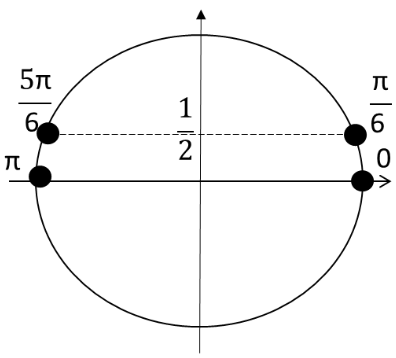
$$\sin x-\sin^2 x=\sin^2 x$$

$$\sin x-2\sin^2 x=0$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\sin x(1-2\sin x)=0$$

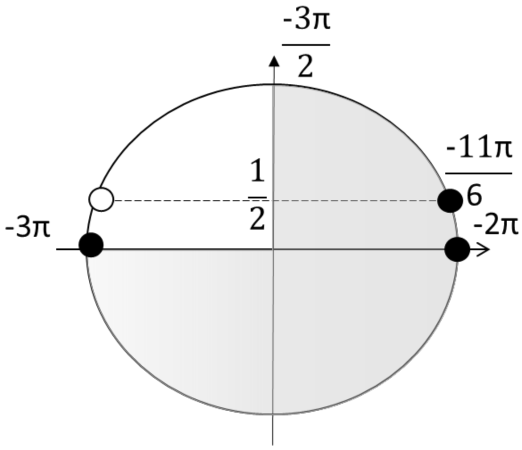
$\sin x=0$ и $\sin x=\frac{1}{2}$



$x=\pi k, k\in Z$ и $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

б) Отберем корни с помощью тригонометрического круга. Отметим отрезок из задания на рисунке и назовем все точки:

MAXIMUM
ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНАМ



Получим точки: $-3\pi; -2\pi; -\dfrac{11\pi}{6}$

Ответ:

а) $\pi k, k \in Z$, $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

б) $-3\pi; -2\pi; -\dfrac{11\pi}{6}$

Совет от эксперта: *Обратите внимание, что отбор корней считается обоснованным, если записан процесс отбора. Для графического способа отбора должен присутствовать график или тригонометрический круг, на котором будут обозначены определённый интервал и решения. Для отбора через неравенства должен быть записан ход решения неравенств.*

Задание № 14

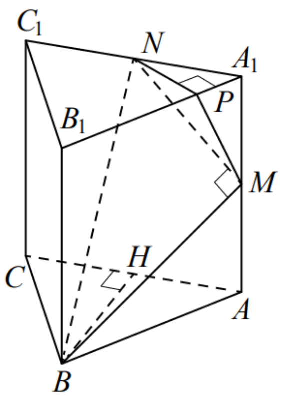
Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки *M* и *N* — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, повышенный уровень сложности, 2 первичных балла, задача по стереометрии на доказательство и нахождения значения элемента.*

Решение:



а) 1) Пусть точка H — середина AC. Рассмотрим треугольник BNH: $BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63$

2) Рассмотрим треугольник ABM. Он прямоугольный с катетами 3 и 6. Применим теорему Пифагора: $BM^2 = BA^2 + AM^2$: $BM^2 = BA^2 + AM^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$.

3) Аналогично рассмотрим треугольник NA_1M. $NM^2 = NA_1^2 + A_1M^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

4) Рассмотрим треугольник BMN. Заметим, что $BN^2 = BM^2 + NM^2 = 45 + 18 = 63$

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M. Что и требовалось доказать.

б) 1) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. По построению $(A_1B_1C_1) \perp (ABB_1)$. Тогда $NP \perp (ABB_1)$ То есть NP – перпендикуляр, MN – наклонная, MP — проекция MN на плоскость ABB_1. Угол NMP — линейный угол искомого угла.

2) $NM^2 = 18$, тогда $NM = 3\sqrt{2}$.

3) Найдем NP. Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$. $A_1B_1C_1$ - равносторонний треугольник, тогда $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, а $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4) Подставим найденные значения в формулу $\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN}$.

$$\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \bullet 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$

Совет от эксперта: *Обратите внимание, что за верное выполнение пункта а) или б) вы уже можете получить 1 балл. Будьте также внимательны к оформлению вашего решения. Многие* *при решении геометрических задач делают ряд выводов в уме. Это лишает решение обоснованности для проверяющего и приводит к потере целого балла.*

Задание № 15

Решите неравенство $\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geq\log_{11}(\frac{x}{x+5}+7)$.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, повышенный уровень сложности, 2 первичных балла, проверяет умения решать неравенства.*

Решение:

$$\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geq\log_{11}(\frac{x}{x+5}+7)$$

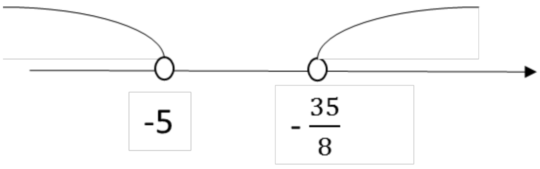
Выпишем ограничения:

$$\begin{cases} 8x^2+7>0 \\ x^2+x+1>0 \\ \frac{x}{x+5}+7>0 \end{cases}$$

Первое и второе неравенства выполняются всегда, потому что дискриминант отрицательный, а ветви параболы направлены вверх. Поэтому решаем только третье неравенство:

$$\frac{x+7(x+5)}{x+5}>0$$

$$\frac{8x+35}{x+5}>0$$



$$(-\infty;-5)\cup(-\frac{35}{8};+\infty)$$

Преобразовываем неравенство на всей области существования:

$$\log_{11}(\frac{8x^2+7}{x^2+x+1})\geq\log_{11}(\frac{x}{x+5}+7)$$

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\frac{x}{x+5}+7$$

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1}\geq\frac{8x+35}{x+5}$$

$$\frac{(8x^2+7)(x+5)-(8x+35)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

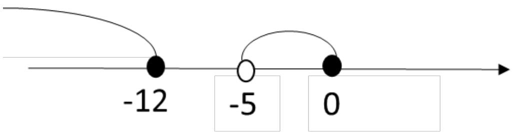
$$\frac{(8x^3+7x+40x^2+35)-(8x^3+35x^2+8x^2+35x+8x+35)}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

$$\frac{8x^3+7x+40x^2+35-8x^3-43x^2-43x-35}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

$$\frac{-36x-3x^2}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

$$\frac{-3x(12+x)}{(x^2+x+1)(x+5)}\geq 0$$

$$\frac{x(12+x)}{(x^2+x+1)(x+5)}\leq 0$$



Таким образом, неравенство имеет решение $(-\infty;-12]\cup(-5;0]$.Ели учесть ограничения, то получим ответ: $(-\infty;-12]\cup(-\frac{35}{8};0]$

Ответ: $(-\infty;-12]\cup(-\frac{35}{8};0]$

Совет от эксперта: *Задание не является сложным, если внимательно и последовательно выполнять действия. В №15 нельзя забывать про ограничения, нужно уметь делать преобразования с неравенствами: от простейших до равносильных переходов, а также обязательно надо владеть методом интервалов.*

Задание № 16

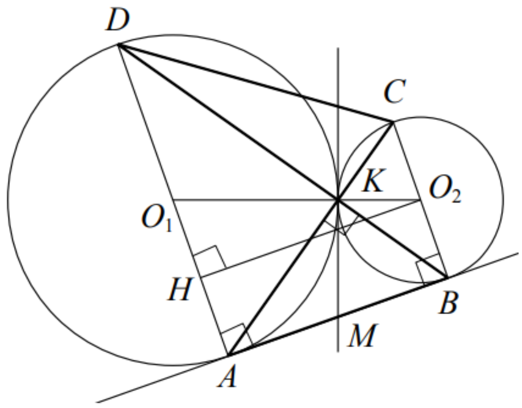
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Описание задания: задание с развернутым ответом, повышенный уровень сложности, 3 первичных балла, задача по планиметрии на доказательство и нахождения значения элемента.

Решение:



а) 1) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, AM=KM и KM=BM.

2) Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

3) Тогда вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD.

4) Значит, AD⊥AB. Аналогично, получаем, что BC⊥AB. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) 1) Пусть, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.

2) Треугольники BKC и AKD подобны (по двум углам), тогда $\frac{AD}{BC}=\frac{8}{2}=4$ и $\frac{S_{AKD}}{S_{KBC}}=16$. Пусть $S_{KBC}=S$, получим $S_{AKD}=16S$.

3) У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}}=\frac{0,5DK \bullet AK}{0,5KB \bullet AK}=\frac{DK}{KB}=4$. $S_{AKB}=4S$. Аналогично, $S_{CKD}=4S$.

4) Площадь трапеции ABCD равна $S_{ABCD}=4S+4S+16S+S=25S$.

5) Вычислим площадь трапеции ABCD. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H=\sqrt{O_1O_2{}^2-O_1H^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}AB=\frac{8+2}{2}\bullet 4=20.$$

6) $25S=20$

$S=0,8$

$S_{AKB}=4S$=3,2

Ответ: 3,2

Совет от эксперта: *Исходя из статистики решаемости, эта задача уже несколько лет входит в тройку самых сложных на ЕГЭ по математике. Помните про стратегию получения частичных баллов. Два наиболее простых способа получить 1 частичный балл за это задание:*

- *решить только пункт а);*
- *решить только пункт б) с использованием утверждения пункта а) без доказательства.*

Задание № 17

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где *r* — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. руб)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, повышенный уровень сложности, 3 первичных балла, текстовая экономическая задача, проверяет умения строить математические модели и использовать приобретенные знания и в повседневной жизни*

Решение:

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Заполним в таблице долг на 1-е число каждого месяца. Выплаты каждый период составляют разницу между тем, что было на счете, и тем, что стало после выплаты.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. руб)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0
Долг после начисления процентов	*k*	0,6*k*	0,4*k*	0,3*k*	0,2*k*	0,1*k*	-
Выплата	*k*-0,6	0,6k-0,4	0,4*k*-0,3	0,3*k*-0,2	0,2*k*-0,1	0,1*k*-0	-

Найдем общую сумму выплат:

$$k - 0,6 + 0,6k - 0,4 + 0,4k - 0,3 + 0,3k - 0,2 + 0,2k - 0,1 + 0,1k = 2,6k - 1,6$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

$$2,6k-1,6<1,2$$

$$2,6k<2,8$$

$$k<\frac{14}{13}$$

$$1+\frac{r}{100}<\frac{14}{13}$$

$$\frac{r}{100}<\frac{1}{13}$$

$$r<\frac{100}{13}$$

$$r<7\frac{9}{13}$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 7. Значит, искомое число процентов — 7.

Ответ: 7

Совет от эксперта: *Задача 17 — это текстовая задача, где предстоит работать с экономическими моделями. Основные сложности данного задания: запутанное условие, в некоторых случаях требующее дополнительных знаний о процессе начисления банковских процентов; уравнение с большими и неудобными числами. Все это является особенностью любой текстовой задачи, поэтому важно в первую очередь уметь упорядочивать и визуализировать данные.*

Задание № 18

Найдите все положительные значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, высокий уровень сложности, 4 первичных балла, задача с параметром, проверяет умения решать уравнения и неравенства.*

Решение:

Рассмотрим каждое уравнение в системе:

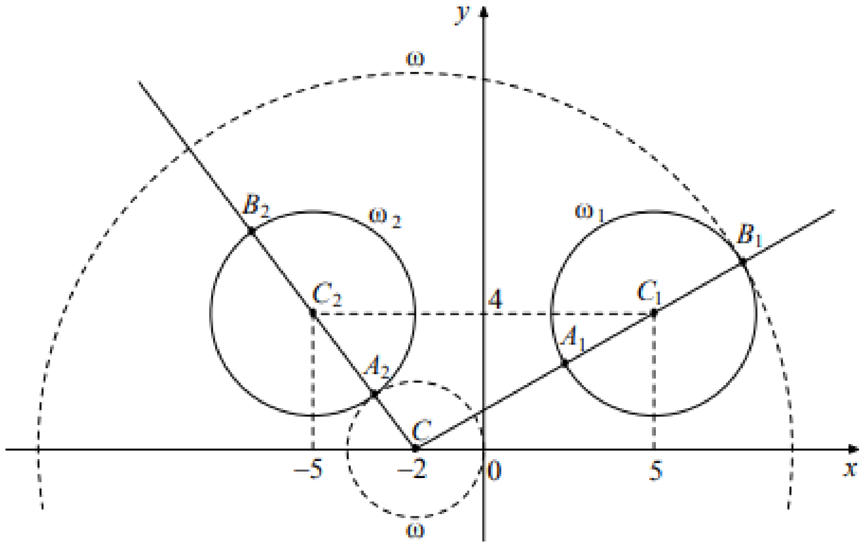
(1) $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$.

При x≥0 получим $(x-5)^2+(y-4)^2=9$. Это уравнение окружности с центром $C_1(5;4)$ и радиусом 3.

При x≤0 получим $(-x-5)^2+(y-4)^2=9$, что равносильно $(x+5)^2+(y-4)^2=9$. Это уравнение окружности с центром $C_2(-5;4)$ и радиусом 3.

(2) $(x+2)^2+y^2=a^2$

При a≥0 получим окружность с центром C(-2;0) и радиусом *a*.



Уравнения (1) и (2) имеют ровно одно решение, если радиус второй окружности *a* равен отрезку CA_2 или отрезку CB_1 (см рисунок).

Найдем CA_2:

$CA_2=CC_2-A_2C_2=CC_2-3$.

$CC_2=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (из прямоугольного треугольника)

Тогда $CA_2 = 5 - 3 = 2 = a$

Найдем CB_1:

$CB_1=CC_1+C_1B_1=CC_1+3$.

$CC_1=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$ (из прямоугольного треугольника)

Тогда $CB_1=\sqrt{65}+3=a$

Ответ: $\sqrt{65}+3$; 2

Совет от эксперта: *Для решения №18 необходимы навыки решения неравенств, работы с графиками функций, а также умение работать с параметром. Прежде чем браться за 18 номер нужно довести до совершенства решение номеров 5,9,13, 15 из ЕГЭ. Помните о получении частичных баллов, поэтому внимательно изучите критерии оценивания.*

Задание № 19

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Описание задания: *задание с развернутым ответом, высокий уровень сложности, 4 первичных балла, олимпиадная задача, проверяет умение строить и исследовать математические модели.*

Решение:

а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов. Суммарный балл равен 20. Средний балл равен 20:2=10. Пусть второй перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 стал равен 1:1=1, то есть уменьшился в 10 раз. Ответ: да.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,9(m+1)B - mB$$

$$10u = 9mB + 9B - 10mB$$

$$10u = (9-m)B$$

Если B =7, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$. Значит, $B \neq 7$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A. Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0,9(8-m)A$$

$$10u = 90A - 10mA - 72A + 9mA$$

$$10u = 18A - mA$$

$$10u = A(18-m)$$

Из пункта б) помним, что $10u = (9-m)B$.

$$10u = A(18-m) = B(9-m)$$

Заметим, что если B =1 или B =3 , то $B(9-m)$ не делится на 10.

Если B = 2 или B = 4, то m =4. В первом случае 14A =10, а во втором 14A =20. Значит, ни один из этих случаев невозможен.

При B =5 и m =3 получаем u =3 и A = 2.

Пример:

Этот случай реализуется, например, если:

- в школе № 1 писали тест 6 учащихся, трое из них набрали по 1 баллу, а трое — по 3 балла,
- в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов,
- у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

Ответ: а) да б) нет в) 5

Совет от эксперта: Помните про критерии оценивания! Если задание состоит из 3 пунктов, то последний пункт даёт 2 балла. Как правило, этот пункт представляет задачу типа «оценка + пример», то есть требуется найти максимальное или минимальное значение некоторой величины. Правильное оценивание этой величины даёт 1 балл, а верный пример, когда данная оценка достигается при выполнении условий задачи, даёт ещё 1 балл.